

設定物業的標價

學習階段： 3

學習範疇： 數與代數

學習單位： 公式
二元一次方程
探索與研究

目標： (i) 豐富學生在現實情境中應用二元一次方程及其圖像的經驗
(ii) 提升學生在建模中識別所需參數和作出假設的能力
(iii) 學習在數學建模過程中運用資訊科技（IT）

先備知識： (i) 運用代入法求公式中未知數的值
(ii) 理解二元一次方程的概念及其圖像

教學資源： 配有 MS Excel 及網路連線的桌上型電腦或平板電腦

背景資料：

房地產定價是一個複雜的領域，涉及影響房產價值的各種因素。數學建模提供一個有用的工具，以了解和估算房地產價格，為潛在的買家、賣家和房地產專業人士提供有用的參考。以下建模活動的主要目標是豐富學生對二元一次方程及其圖像的理解和實際應用。

基於實證性的模型，這套活動引導學生把數據轉化為對物業定價作出明智決定的導航工具。在資訊科技的幫助下，學生能夠制定模型，而無需因未有進深的數學和統計學知識所限制。隨著學生深入研究建模，他們會探索數值估算並討論模型的參數、假設及局限性。

活動詳情：

這資源套件共有三個主要的活動：

- 活動 1：回顧先備知識（1A）和運用 MS Excel 繪製圖像和制定模型（1B）。
- 活動 2：運用物業標價的數據和相應的樓面面積來制定模型。
- 活動 3：運用物業標價的數據和它們相應的樓齡來制定模型。

根據 Yong 等人（2015）的數學建模過程框架，下表總結了教師可以在相應問題中與學生討論的元素。

階段	元素	工作紙 1A	工作紙 1B	工作紙 2	工作紙 3
定義	定義感興趣的問題	封面			
	確定變量和參數	1(a)		1	1
轉化	確定支配原則	1(a)	2, 4, 6	2	1
	作出簡化假設		9	7	6
	構建數學模型	1(a)	2, 4, 7	4	3
分析	選擇合適的數學工具 & 解決 數學問題	1(a)	3, 5, 7, 8	3-5	2-4
	確定或估計參數		3, 7	4	3
	驗證解決方案			6	5
解釋	視像化解決方案	1(b)	3, 7	4	3
	得出適當的結論 & 傳達結果	1(a)	5, 8	5, 6	4

活動 1A (請參閱工作紙 1)

此活動的目的是回顧學生的先備知識，包括使用代入法來找出公式中未知數的值 (問題 1(a)) 和二元一次方程及其圖像的概念 (問題 1(b))。

教學建議：

1. 教師可透過討論在現實情境中使用的公式來引起學生的興趣。問題 1(a) 涉及二元一次方程，這個方程可用作計算印刷小冊子的成本。在問題 1(b) 中，學生需繪畫兩個二元一次方程的圖像。請注意，這直線的斜率是正數。因此，教師可與學生討論以下的觀察。

- x 的值越大， y 的值就越大。這將有助討論活動 2 中，物業的樓面面積與標價之間的關係。

建議答案：

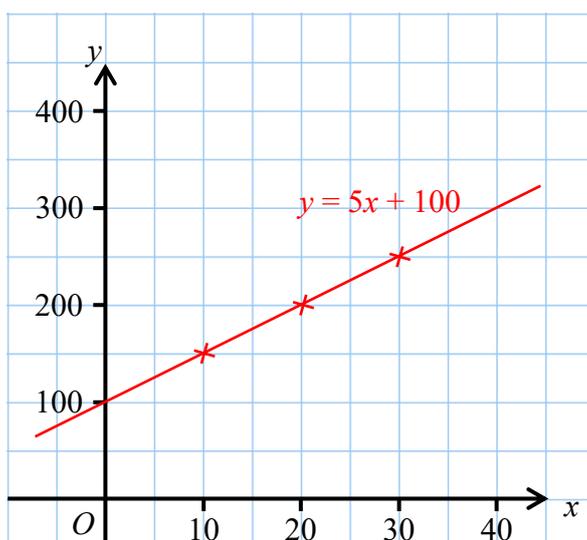
(a) 把 $x = 50$ 代入方程。

$$\begin{aligned}y &= 5(50) + 100 \\ &= 350\end{aligned}$$

∴ 印刷 50 本小冊子的成本是 \$350。

(b) $y = 5x + 100$

x	10	20	30
y	150	200	250



活動 1B (請參閱工作紙 1)

此活動的目的是回顧學生使用試算表的技巧，並介紹使用 MS Excel 制定模型的資訊科技技能。

教學建議：

2. 根據問題 1(a) 的情境，教師可向學生介紹模型的概念。具體來說， $y = 5x + 100$ 可被視為描述印刷小冊子數量與所需成本之間關係的模型。
3. 教師應強調，我們可以這樣計算是因為我們已經有個這方程（即模型）。在現實情況下，我們一開始可能沒有這個模型，或者必須根據觀察來制定模型。因此，教師可向學生介紹使用 MS Excel 制定模型的資訊科技技能。教師可運用工作紙 1 中的逐步指示，引導學生制定描述印刷小冊子數量與所需時間之間關係的模型。
4. 基於已知的數據， $y = 1.5x + 5$ 是描述印刷小冊子數量與所需時間之間關係的模型。
5. 問題 5 讓學生應用他們所制定的模型來估算印刷特定數量小冊子所需的時間。透過這個應用，教師可強調數學建模的實用性。

建議答案：

把 $x = 80$ 代入 $y = 1.5x + 5$ 。

$$\begin{aligned}y &= 1.5(80) + 5 \\ &= 125\end{aligned}$$

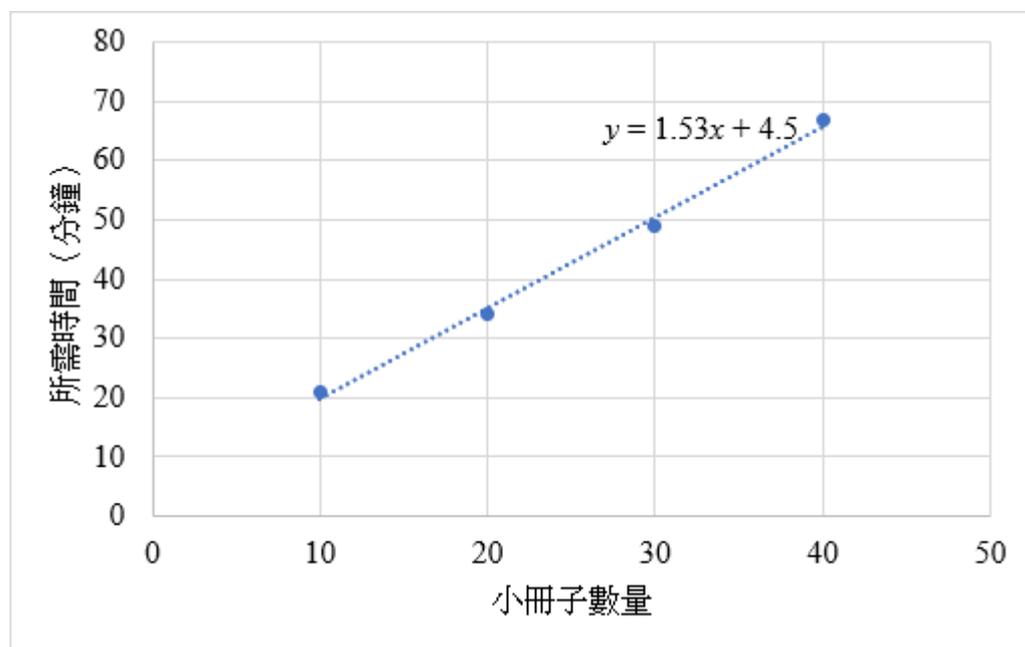
∴ 印刷 80 本小冊子所需的時間估計為 125 分鐘。

6. 請注意，我們所提供的數據點位於一條直線之上。教師應強調，在現實中，我們不一定能夠找到一條通過所有數據點的直線。然而，儘管與一條直線有一些偏差，我們仍然可以觀察到一個整體的趨勢。例如，我們印刷的小冊子數量越多，所需的時間就越多。對於能力較高的學生，教師可考慮討論在 2013 年香港中學文憑考試數學（必修部分）試卷二第 28 題和 2008 年香港中學會考數學試卷二第 36 題的圖像。

因此，教師可向學生介紹最佳擬合線的概念，即一條使線與數據點之間的距離最小化的線。如果學生對數學和統計學有濃厚的興趣，教師可提及「回歸線」這個術語。但對於初中的學生，我們建議教師多加聚焦於資訊科技在建模過程中的運用，以及模型成果的應用。

7. 問題 7 要求學生應用他們在問題 3 中學到的技能，繪製一個基於已知數據的圖像並制定模型。這可成為教師的進展性評估，以檢視學生是否掌握在活動 2 和活動 3 所需的資訊科技技能。

建議答案：



∴ 該模型是 $y = 1.53x + 4.5$ 。

8. 與問題 5 相似，問題 8 讓學生應用他們制定的模型來估算印刷特定數量小冊子的所需時間。儘管我們不能找到一條通過所有數據點的直線，但最佳擬合線能幫助我們進行估算。透過這個應用，教師可再次強調數學建模的實用性。

建議答案：

把 $x = 80$ 代入 $y = 1.53x + 4.5$ 。

$$\begin{aligned} y &= 1.53(80) + 4.5 \\ &= 126.9 \end{aligned}$$

∴ 印刷 80 本小冊子所需的時間估計為 127 分鐘。

9. 在活動 1 的尾聲，教師可進行關於制定模型的假設和局限性的討論。這可提升學生在建模過程中作出假設和識別局限性的能力。以下是一些可能的討論結果。

- 假設：
 1. 線性關係：模型假設印刷小冊子數量與所需時間之間存在線性關係。但在現實中，這並非必然成立。特別是在印刷非常大量的小冊子的情況下，機器限制或操作者疲勞可能會令印刷速度減慢。
 2. 沒有其他因素影響：模型假設影響印刷小冊子所需時間只有小冊子數量這一個因素，沒有其他因素的影響。但在實際情況下，機器效率、操作者經驗和工作量變化等因數均可能影響所需時間。
- 局限性：
 1. 過度簡化：這個模型只考慮一個因素（即小冊子數量）而過度簡化了印刷過程。印刷過程可能受到許多其他變數的影響，包括紙張質量和小冊子的厚度，而這個模型並未考慮。
 2. 依賴少量數據：該模型只是基於 4 組數據來制定。印刷過程、技術和其他相關因素的任何變化都可能使模型不夠準確或過時。我們需要更長時間的觀察來搜集更多數據，再制定更完善的模型。

活動 2 (請參閱工作紙 2)

此活動的目的是透過使用真實數據制定實證性的模型，以豐富學生的建模經驗。學生將使用物業的標價和相應的樓面面積來制定模型。工作紙 2 舉例說明了如何使用數據和引導學生進行建模的教學設計。為提高與他們日常生活的關聯，教師可要求學生在課堂前收集學校附近物業的標價數據。建模活動便可基於他們收集到的數據進行。

教學建議：

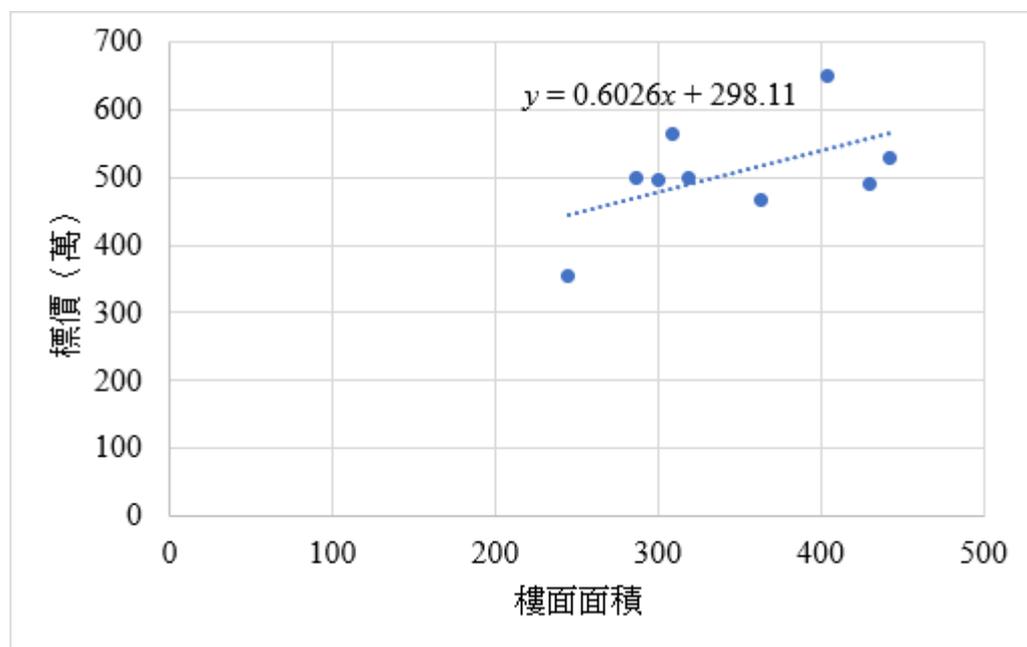
1. 教師可透過討論設定物業標價時所需的資訊來引起學生的興趣。這可提升學生在建模過程中識別所需變數的能力。以下是一些可能的討論結果。
 - 大小和格局：樓面面積、房間數目、浴室數目和廚房數目。
 - 樓宇狀況：新建、已翻新或需要翻新。
 - 物業類型：私人屋苑、公共房屋或村屋。
 - 設施：游泳池、健身室和停車場。
 - 位置：靠近交通、學校和購物中心的程度。
2. 教師展示一些物業的標價數據和相應的樓面面積。雖然在問題 2 圖表中的廣告在香港十分常見，但教師應確認學生對當中數值的理解。例如，有些學生可能不知道如何將「498 萬」轉換成 4,980,000。

教師可討論樓面面積和物業標價之間的一般關係。具體來說，樓面面積越大，物業的標價就越高。

3. 教師可接續要求學生把數據輸入到 MS Excel。為避免混亂，教師可建議學生把樓面面積和標價分別輸入到欄 A 和欄 B。

4. 學生運用在活動 1B 中學到的技能繪製圖表並制定模型（模型 A），以描述樓面面積（ x ）與物業標價（ y ）之間的關係。教師可以指出，所得到的圖表與問題 2 所討論的一般關係吻合。

建議答案：



∴ 該模型是 $y = 0.6026x + 298.11$ 。

5. 問題 5 讓學生應用他們制定的模型來建議一個物業的標價。透過這個應用，教師可強調數學建模在房地產定價中的實用性。

建議答案：

把 $x = 420$ 代入 $y = 0.6026x + 298.11$ 。

$$\begin{aligned} y &= 0.6026(420) + 298.11 \\ &= 551.202 \end{aligned}$$

∴ 該物業的標價可定為 \$5,510,000。

6. 提示學生透過與實際標價進行比較來評估建模結果。這是一個重要的步驟，不僅有助於評估模型，還能幫助學生把數學世界和現實世界結合到一起。

建議的標價與實際標價之間的任何差異均可揭示優化模型的需要。例如，如果模型持續高估或低估標價，則必須對模型進行調整以提高其準確性。

建議答案：

絕對誤差

$$= \$ (580 - 551) \times 10,000$$

$$= \$290,000$$

百分誤差

$$= \frac{290,000}{5,800,000} \times 100\%$$

$$= 5\%$$

我們建議的標價比實際標價低約 5%。業主可能認為有其他因素，例如景觀和物業的裝修，使其價值提高。

7. 在活動 2 的尾聲，教師可進行關於制定模型的假設和局限性的討論。這可提升學生在建模過程中作出假設和識別局限性的能力。以下是一些可能的討論結果。

• 假設：

1. 線性關係：模型假設樓面面積與物業標價之間存在線性關係。但在現實中，這並非必然成立，特別是在房地產市場中，呎價可能隨著物業的樓面面積以幾何級數上升。
2. 沒有其他因素影響：模型假設標價僅受樓面面積的影響。然而，如問題 1 所討論，實際情況可能不是這樣，其他因素也會影響定價。

• 局限性：

1. 過度簡化：該模型過度簡化了樓面面積與物業標價之間的關係。在現實中，物業價格受到許多因素的影響，不僅是樓面面積，還包括地理位置、物業狀況、市場需求、設施和經濟狀況等。
2. 依賴少量數據：該模型僅是基於 9 個物業的標價來制定，這可能無法準確代表整個市場的各種物業，故需要收集更多的數據，來建立更完善的模型。

活動 3 (請參閱工作紙 3)

繼活動 2 之後，此活動的目的是透過使用真實數據制定實證性的模型，進一步豐富學生的建模經驗。學生將使用物業的標價和相應的樓齡來制定模型。工作紙 3 舉例說明了如何使用數據和引導學生進行建模的教學設計。如果學生要進行數據收集，他們需要調查所收集數據中建築物的竣工年份。教師可建議學生在網上尋找相關的資料，同時強調批判性思維以判斷資訊來源的可信性。

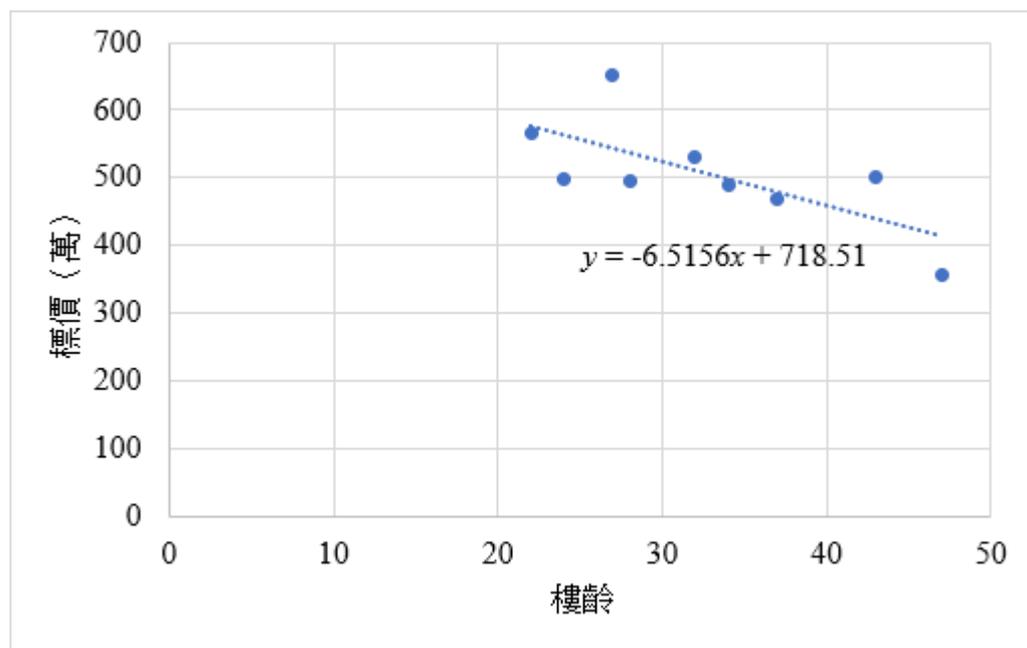
教學建議：

1. 教師可透過討論另一個可能影響房地產定價的因素，即建築物的年齡，來引起學生的興趣。教師展示一些物業標價的數據和相應建築物的竣工年份。

教師可討論樓齡與物業標價之間的一般關係。具體來說，樓齡越高，物業的標價就越低。這應用了「百分法」學習單位中的折舊概念。

2. 有了活動 2 的經驗，學生應該能夠把數據輸入到 MS Excel 中。然而，教師應檢視他們是否能夠從建築物的竣工年份計算物業的樓齡。為避免混亂，教師可建議學生分別把物業的樓齡和標價輸入到欄 A 和欄 B。
3. 學生運用在活動 1B 中學到的技能繪製圖表並制定模型（模型 B），以描述樓齡 (x) 與物業標價 (y) 之間的關係。教師可以指出，所得到的圖表與問題 1 所討論的一般關係吻合。

建議答案：



∴ 該模型是 $y = -6.5156x + 718.51$ 。

4. 問題 4 讓學生可應用他們所制定的模型來建議一個物業的標價。

建議答案：

樓齡

$$= 2023 - 1985$$

$$= 38$$

把 $x = 38$ 代入 $y = -6.5156x + 718.51$ 。

$$y = -6.5156(38) + 718.51$$

$$= 470.9172$$

∴ 該物業的標價可定為 \$4,710,000。

5. 根據模型 A 和模型 B 的建議標價，學生有機會比較不同模型。對於模型 A，標價相差 \$290,000。但對於模型 B，標價相差 \$1,090,000。在這種情況下，模型 A 的建議標價比模型 B 的建議標價更接近實際的標價。以下是可能的含義。

- 與樓面面積相比，樓齡可能對物業的標價影響較小。

6. 與活動 2 相似，教師可進行關於制定模型的假設和局限性的討論。有了活動 2 的經驗，學生應該能夠更好地識別建模過程中的假設和局限性。以下是一些可能的討論結果，這與活動 2 的問題 7 相似。
- 假設：
 1. 線性關係：模型假設樓齡與物業標價之間存在線性關係。
 2. 沒有其他因素影響：模型假設標價僅受建築物年齡的影響。但至少有一個重要因素，即樓面面積，未被考慮進去。
 - 局限性：
 1. 過度簡化：該模型過度簡化了樓齡與物業標價之間的關係。
 2. 依賴少量數據：該模型僅是基於 9 個物業的標價制定，可能無法準確代表整個市場的各种物業。

總結：

在活動 2 和活動 3 中，學生根據一些真實數據運用 MS Excel 來制定最佳擬合線，這些直線有助表達在圖表中不同數據點的關係。然而，活動 2 和活動 3 均只考慮了一個因素（樓面面積；樓齡）來制定模型。

要建立涉及兩個或多個因素的模型，教師可考慮向學生介紹使用免費的線上統計應用程序，例如：

https://stats.blue/Stats_Suite/multiple_linear_regression_calculator.html

<https://www.socscistatistics.com/tests/multipleregression/default.aspx>

作為增進活動，學生可使用上述活動中的數據制定模型。

Variable Names (optional):	Resp. Var. y	Expl. Var. x_1	Expl. Var. x_2
	Price	Area	Age
Sample data goes here (enter numbers in columns):	468 530 490 650 565 498 500 495 355	363 443 430 404 309 287 319 300 245	37 32 34 27 22 24 43 28 47

但值得注意的是，上述活動的數據很少。另外，影響房地產標價的因素有很多。因此，我們必須收集更多的數據，並考慮更多的因素來持續完善我們的模型。

參考文獻：

Yong, D., Levy, R., & Lape, N. (2015). Why no difference? A controlled flipped classroom study for an introductory differential equations course. *PRIMUS*, 25(9–10), 907–921.

建議的教案和教學流程

教學時間：70 分鐘或雙課節

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
10	<ul style="list-style-type: none"> 引起學生興趣 回顧先備知識 	<ol style="list-style-type: none"> 教師透過討論現實情境來引起學生的興趣。 教師利用例子作為熱身練習，讓學生回顧運用代入法求公式中未知數的值。 教師利用示例作為熱身練習，回顧學生二元一次方程及其圖像的概念。 	<p>WS 封面</p> <p>WS1A Q1</p>
25	<ul style="list-style-type: none"> 介紹模型的概念 回顧使用試算表的 IT 技巧 介紹使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧 應用建模結果 介紹最佳擬合線的概念 	<ol style="list-style-type: none"> 教師向學生介紹模型的概念。例如，方程 $y = 5x + 100$ 可被視為描述印刷小冊子數量與所需成本之間關係的模型。 教師要求學生把數據輸入到 MS Excel，以回顧他們使用試算表的技巧。 教師向學生介紹使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧。 教師要求學生應用他們的建模結果作出估算。 教師強調在現實中，我們不一定能夠找到一條通過所有數據點的直線，但我們仍然可觀察到整體趨勢。以下兩題試題可以作為示例。 <ul style="list-style-type: none"> ➤ 2013 年香港中學文憑數學科卷 2 Q28 ➤ 2008 年香港中學會考數學科卷 2 Q36 因此，教師引入最佳擬合線的概念。 	<p>WS1B Q2</p> <p>WS1B Q3–4</p> <p>WS1B Q5</p> <p>WS1B Q6</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
	<ul style="list-style-type: none"> • 加強使用 MS Excel 制定模型的 IT 技巧 • 應用建模結果 • 提升在建模過程中作出假設和識別局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 7. 教師要求學生應用他們之前學到的技巧來繪製圖像，並根據已知的數據制定模型。 8. 教師評估學生對 IT 技巧的掌握程度。 9. 教師要求學生應用他們的建模結果作出估算。 10. 學生分組討論所制定模型的假設和局限性。教師可運用以下問題來激發思考：關係總是線性的嗎？還有其他我們沒有考慮的因素嗎？數據是否足以制定模型？ 	<p>WS1B Q7</p> <p>WS1B Q8</p> <p>WS1B Q9</p>
20	<ul style="list-style-type: none"> • 提升識別變數的能力 • 使用真實數據制定實證性的模型 • 應用建模結果 • 評估模型 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生分組討論為物業設定標價時所需的資訊。教師可要求學生考慮以下幾方面以促進討論：大小和佈局、樓宇狀況、物業類型、設施和位置。 2. 透過展示一些真實數據，教師討論建築面積與物業標價之間的一般關係。 3. 教師要求學生把數據輸入到 MS Excel 並制定模型（模型 A）。 4. 教師要求學生應用他們的建模結果來提供建議。 5. 教師要求學生通過與真實數據進行比較來評估建模結果。 6. 學生分組討論真實數據和基於模型的建議，兩者之間存在差異的可能原因。教師可運用以下問題來激發思考：為甚麼業主認為物業值得更高的價格？ 	<p>WS2 Q1</p> <p>WS2 Q2-4</p> <p>WS2 Q5</p> <p>WS2 Q6</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
	<ul style="list-style-type: none"> 提升在建模過程中作出假設和識別局限性的能力 	7. 學生分組討論所制定模型的假設和局限性。教師可運用以下問題來激發思考：關係總是線性的嗎？還有其他我們沒有考慮的因素嗎？數據是否足以制定模型？	WS2 Q7
10	<ul style="list-style-type: none"> 使用真實數據制定實證性的模型 應用建模結果 評估模型 提升在建模過程中作出假設和識別局限性的能力 	<ol style="list-style-type: none"> 透過展示一些真實數據，教師討論樓齡與物業標價之間的一般關係。 教師要求學生把數據輸入到 MS Excel 並制定模型（模型 B）。 教師要求學生應用他們的建模結果來提供建議。 教師要求學生通過與真實數據進行比較來評估建模結果。 然後，教師要求學生比較不同的模型。學生分組討論他們觀察的含義。教師可運用以下問題來激發思考：哪個模型能提出更接近真實數據的標價。甚麼因素對標價影響更大。 學生分組討論所制定模型的假設和局限性。教師可運用以下問題來激發思考：關係總是線性的嗎？還有其他我們沒有考慮的因素嗎？數據是否足以制定模型？ 	<p>WS3 Q1–3</p> <p>WS3 Q4</p> <p>WS3 Q5</p> <p>WS3 Q6</p>

時間 (分鐘)	教學目的	教學活動和流程	資源/ 備註
5	<ul style="list-style-type: none"> • 總結活動 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 教師回顧模型的概念以及 MS Excel 在制定模型時的應用。 2. 教師強調數學建模在物業定價和其他領域的實用性。 3. 教師指出在制定模型時需要作出假設，因此存在局限性。 4. 教師建議學生進一步探究使用免費的線上統計應用程序，以制定涉及兩個或多個因素的模型。 	